TeleAcademia
Tu Academia Online

www.teleacademia.es

Tabla Resumen de Integrales

Nivel: Bachillerato y Universidad
Versión: 0.1

TeleAcademia
Tu Academia Online.
http://www.teleacademia.es

Índice general

1 Tabla de Integrales

Tipo	Función simple	Función compuesta
Constante	$\int k\,dx = kx + C,\ k \in \mathbb{R}$	
Potencial	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
Logarítmica	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

Trigonométricas

Seno	$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + C$
Coseno	$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$
Tangente	$\int \sec^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$\int \sec^2(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C$
	$\int 1 + \operatorname{tg}^2(x)\,dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2(f(x))) \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C$
Cotangente	$\int \operatorname{csec}^2(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C$	$\int \operatorname{csec}^2(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + C$
	$\int 1 + \operatorname{ctg}^2(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(x) + C$	$\int (1 + \operatorname{ctg}^2(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + C$
	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}\,dx = -\operatorname{ctg}(f(x)) + C$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$

2 Resumen de Cálculo de Integrales

Reglas de Integración

Suma	$\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
Resta	$\int f(x)-g(x)\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$
Producto por un número	$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx \qquad a\in\mathbb{R}$
Combinadas	$\int af(x)\pm bg(x)\,dx=a\int f(x)\,dx\pm b\int g(x)\,dx \qquad a,b\in\mathbb{R}$

Fórmula de Integración por Partes

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

Regla nemotécnica para acordarse de la fórmula:

«**un** **d**ía **vi** **u**na **v**aca **sin rabo** **v**estida **d**e **u**niforme».

Para escoger quien será la función u utilizamos la regla «ALPES», en este orden, primero las funciones trigonométricas inversas **A**rco, arcsen, arccos, arctg, ..., luego las funciones **L**ogarítmicas, despues las **P**olinómicas, luego las **E**xponenciales y por último las trigonométricas directas, **S**eno, coseno, ...

Cambios más usuales para la integración por cambio de variable

Integrales trigonométricas

Son integrales de la forma:

$$\int R(\operatorname{sen}(x),\cos(x))\,dx$$

y podemos distinguir los siguientes casos:

1. Si $R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, osea, el integrando es impar en $\operatorname{sen}(x)$, se hace el cambio:
$$t = \cos(x)$$
por lo tanto
$$dt = -\operatorname{sen}(x)\ dx, \qquad \operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}, \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
2. Si $R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, osea, el integrando es impar en $\cos(x)$, se hace el cambio:
$$t = \operatorname{sen}(x)$$
por lo tanto
$$dt = \cos(x)\ dx, \qquad \cos(x) = \sqrt{1-t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
3. Si $R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, osea, el integrando es par en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, se hace el cambio:
$$t = \operatorname{tg}(x)$$
por lo tanto
$$dt = (1+\operatorname{tg}^2(x))\ dx, \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$
4. Caso General, se hace el cambio:
$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$
por lo tanto
$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Integrales irracionales

Son integrales de la forma:
$$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$
El cambio a efectuar en este caso es:
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^M \quad \textit{siendo} \quad M = m.c.m.\{p, \dots, s\}$$

Integrales abelianas

Algunos de los tipos más comunes son:

1. De la forma $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{b^2-(ax)^2}\right) dx$.

   Hacemos el cambio:
$$ax = b\ \operatorname{sen}(t), \qquad dx = \frac{b}{a}\ \cos(t)\, dt$$
2. De la forma $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{(ax)^2-b^2}\right) dx$.

   Hacemos el cambio:
$$ax = b\ \sec(t) = \frac{b}{\cos(t)}, \qquad dx = \frac{b\ \operatorname{sen}(t)}{a\cos^2(t)}\, dt$$

3. De la forma $\int R\left(x, \sqrt{(ax)^2 + b^2}\right) dx$.

   Hacemos el cambio:

$$ax = b\ \mathrm{tg}(t), \qquad dx = \frac{b}{a}\left(1 + \mathrm{tg}^2(t)\right) dt$$

4. De la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$.

   Este tipo de integrales pueden transformarse en alguna de uno de los tipos anteriores descomponiendo el polinomio de segundo grado como el cuadrado perfecto de un polinomio de primer grado $+/-$ una constante.

Integrales exponenciales

Son integrales de la forma:

$$\int R(x, a^x)\, dx$$

Hacemos el cambio:

$$t = a^x, \qquad x = \frac{\ln(t)}{\ln(a)}, \qquad dx = \frac{dt}{t \cdot \ln(a)}$$

Integrales logarítmicas

Son integrales de la forma:

$$\int R(x, \ln(x))\, dx$$

Hacemos el cambio:

$$t = \ln(x), \qquad x = e^t, \qquad dx = e^t\, dt$$

Integrales inversas de trigonométricas

Pueden ser de distintos tipos

1. Del tipo:

$$\int R(x, \mathrm{arctg}(x))\, dx$$

   Hacemos el cambio:

$$t = \mathrm{arctg}(x), \qquad x = \mathrm{tg}(t), \qquad dx = \frac{dt}{\cos^2(t)}$$

2. Del tipo:

$$\int R(x, \mathrm{arcsen}(x))\, dx$$

   Hacemos el cambio:

$$t = \mathrm{arcsen}(x), \qquad x = \mathrm{sen}(t), \qquad dx = \cos(t) \cdot dt$$

3. Del tipo:

$$\int R(x, \arccos(x))\, dx$$

   Hacemos el cambio:

$$t = \arccos(x), \qquad x = \cos(t), \qquad dx = -\,\mathrm{sen}(t) \cdot dt$$

Integrales racionales

Son integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

donde el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, si no lo fuera se dividen, el método consiste en descomponer $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples según las raíces de $Q(x)$.

1. Si a_0 es una raíz real simple le corresponde un sumando del tipo:

$$\frac{A}{x-a_0}$$

   con este sumando obtenemos una integral inmediata de tipo **Logarítmica**.

2. Si b_1 es una raíz real múltiple de multiplicidad n le corresponde un sumando del tipo:

$$\frac{B_1}{x-b_1}+\frac{B_2}{(x-b_1)^2}+\cdots+\frac{B_n}{(x-b_1)^n}$$

   con estos sumandos obtenemos integrales inmediatas de tipo **Logarítmica**+**Potenciales**.

3. Si $Q(x)$ tiene una raíz imaginaria simple le corresponde un sumando del tipo:

$$\frac{Mx+N}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

   poniendo $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ como $(x-a)^2+b^2$ nos queda

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

   que se transforma en integrales inmediatas de tipo **Logarítmica**+**Arco tangente**.

4. Si $Q(x)$ tiene una raíz imaginaria múltiple de multiplicidad n le corresponde un sumando del tipo:

$$\frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2}+\cdots+\frac{M_nx+N_n}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

5. La descomposición total de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ hay que plantearla según las raíces de $Q(x)$ atendiendo a los criterios anteriores e incorporando los sumandos correspondientes por cada tipo de raíz, por ejemplo, si $Q(x)$ tiene como raíces a_0, a_1 reales y simples, b_1 real de multiplicidad 2, b_2 real de multiplicidad 3 y una raíz imaginaria simple la descomposición total seria:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a_0}+\frac{B}{x-a_1}+\frac{C}{x-b_1}+\frac{D}{(x-b_1)^2}+\frac{F}{x-b_2}+\frac{G}{(x-b_2)^2}+\frac{H}{(x-b_2)^3}+\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

   por lo tanto

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int\frac{A}{x-a_0}\,dx+\int\frac{B}{x-a_1}\,dx+\int\frac{C}{x-b_1}\,dx+\int\frac{D}{(x-b_1)^2}\,dx+$$

$$\int\frac{F}{x-b_2}\,dx+\int\frac{G}{(x-b_2)^2}\,dx+\int\frac{H}{(x-b_2)^3}\,dx+\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx$$